ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (11-9-2006)

ΘΕΜΑ Ι. Δίνονται τα σημεία $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $\Gamma(0,0,1)$ και η αρχή $O(0,0,0)$.

(i) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου P, του οποίου το διάνυσμα θέσης $\overline{OP}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\overline{OP} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{O\Gamma} \qquad \text{(M.5)}$$

(ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο P βρίσκεται στο επίπεδο του τριγώνου $AB\Gamma$. (M.5)

(iii) Φέρνουμε την ευθεία AP η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ. (M.5)

(iv) Να βρεθεί ο απλός λόγος $(A\Delta P)$. (M.5)

(v) Από την απάντηση των ερωτημάτων (iii) και (iv) να συμπεράνετε πιο χαρακτηριστικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το σημείο P. (M.5)

ΘΕΜΑ ΙΙ. **(i)** Στο (ορθογώνιο) σύστημα $Oxyz$ δίνεται η καμπύλη

$$(c) : \{\sqrt{3}\,x + z = 0,\ \sqrt{3}\,yz - xy = 1\}.$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις της καμπύλης (c) στο σύστημα $OXYZ$, που προκύπτει από το $Oxyz$ με στροφή περί τον άξονα Oy κατά γωνία $\pi/6$ (δηλαδή, $\sphericalangle(Ox,OX) = \pi/6$ και $\sphericalangle(OX,Oz) = \pi/3$). (M.8)

(ii) Από τις εξισώσεις της (c) στο σύστημα $OXYZ$, να δείξετε ότι πρόκειται για υπερβολή, της οποίας να βρείτε τα μήκη των ημιαξόνων και την εκκεντρότητά της. (M.8)

(iii) Δίνεται επιφάνεια με εξίσωση : $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$. Να βρεθεί η εξίσωση ενός εφαπτόμενου επιπέδου αυτής, που διέρχεται από το σημείο $A(2,0,0)$. (M.9)

ΘΕΜΑ ΙΙΙ. Δίνονται τα σημεία $O(0,0,0)$, $A(1,2,3)$ και $B(2,-1,0)$.

(i) Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου γ που διέρχεται από τα σημεία O, A, B. (M.13)

(ii) Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου γ. (M.12)

ΘΕΜΑ IV. Δίνεται η ευθεία ε, η οποία διέρχεται από τα σημεία $O(0,0,0)$ και $A(1,2,-1)$.

(i) Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας Σ που παράγεται από την περιστροφή της ε γύρω από τον άξονα Ox. (M.9)

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της Σ στο σημείο $M(1,1,2)$. (M.8)

(iii) Να βρεθούν οι παράλληλοι και οι μεσημβρινοί της Σ. (M.8)